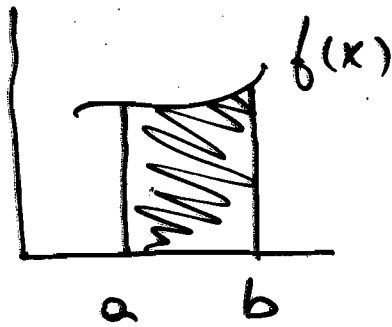


INTEGRACIÓN NUMÉRICA

Tenemos:



$$\text{Área} = \int_a^b f(x) dx$$

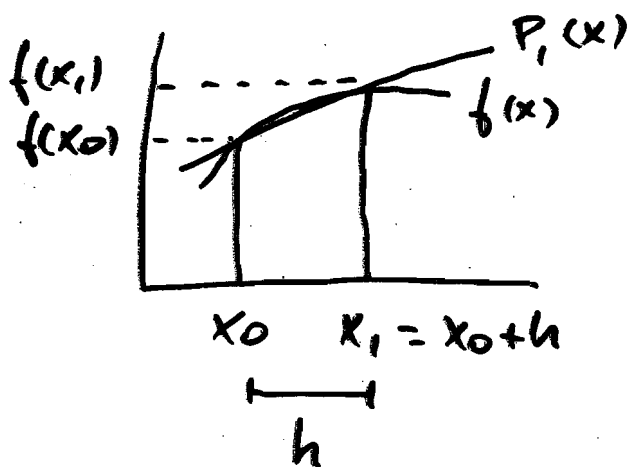
difícil de calcular
no se puede calcular
viene en forma tabular

Aproximamos $f(x) = P(x)$ polinomio interpolador

luego:

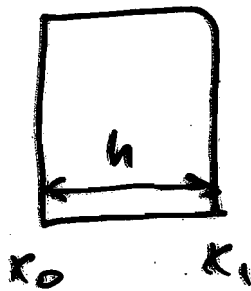
$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b P(x) dx$$

Regla del Trapecio



Vamos a aproximar la función $f(x)$ con un polinomio de primer grado.

Se aproxima cada subintervalo por rectángulos donde la base es h



pto. medio

$$\frac{f_0 + f_1}{2}$$

así:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \frac{h}{2} (f(x_0) + f(x_1))$$

$$= h \left(\frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} \right)$$

↳ base ↳ altura

Dado $[a, b]$, dividimos en n subintervalos,
 $n+1$ puntos, $x_0, x_1, \dots, x_n$.

Suponemos conocidos $f(x_j)$, $j=0, \dots, n$
así:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x) dx =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{h}{2} [f(x_j) + f(x_{j+1})]$$

$$= \frac{h}{2} \left[f(x_0) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(x_n) \right]$$

donde:

$$h = \frac{b-a}{n}$$

Error

$$f(x) = P_1(x) + \underbrace{\frac{f''(\xi)}{2} (x-x_0)(x-x_1)}_{\text{error de interpolaci3n}}$$

↓
pol. grado 1

Veamos una cota para este:

$$E = \int_{x_0}^{x_1} \frac{f''(\xi_x)}{2} (x-x_0)(x-x_1) dx =$$

Una Valor Medio Ponderado

$$= \frac{f''(\xi)}{2} \int_{x_0}^{x_1} (x-x_0)(x-x_1) dx =$$

Cambio $t = x - x_0$
 $dt = dx$
 $x - x_1 = x - x_0 - h = t - h$

$$= \int_0^h t(t-h) dt = \int_0^h (t^2 - th) dt =$$

$$= \left[\frac{t^3}{3} - \frac{ht^2}{2} \right]_0^h = \frac{h^3}{3} - \frac{h^3}{2} = -\frac{h^3}{6}$$

así, el error para cada intervalo es:

$$E = -\frac{h^3}{12} f''(\xi)$$

Error global

$$E = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{h^3}{12} f''(\xi_j) \leq \sum_{j=0}^{n-1} \frac{h^3}{12} M = n \frac{h^3}{12} M$$

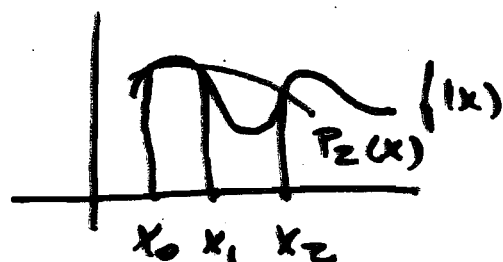
Error absoluto

$$E \leq \frac{h^2}{12} (b-a) M \quad \text{orden de } h^2, O(h^2)$$

doude $M = \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$

Simpson

Utilizaremos parábolas. Necesitamos 3 puntos



$$P_2(x) = L_0(x) f(x_0) + L_1(x) f(x_1) + L_2(x) f(x_2)$$

donde:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

luego:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx \approx \int_{x_0}^{x_2} L_0(x) \underbrace{f(x_0)}_{cte} dx +$$

$$+ \int_{x_0}^{x_2} L_1(x) \underbrace{f(x_1)}_{cte} dx +$$

$$+ \int_{x_0}^{x_2} L_2(x) \underbrace{f(x_2)}_{cte} dx$$

entonces,

$$\int_{x_0}^{x_2} L_0(x) dx = \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} dx =$$

Cambio
 $t = x - x_0$
 $dt = dx$
 $x - x_1 = t - h$
 $x - x_2 = t - 2h$

$$= \frac{1}{2h^2} \int_0^{2h} (t^2 - 3ht + 2h^2) dt =$$

$$= \frac{1}{2h^2} \left[\frac{t^3}{3} - \frac{3ht^2}{2} + 2h^2 t \right]_0^{2h} =$$

$$= \frac{1}{2h^2} \left[\frac{8}{3} h^3 - \frac{12h^3}{2} + 4h^3 \right] = \frac{h}{3}$$

De forme análoga:

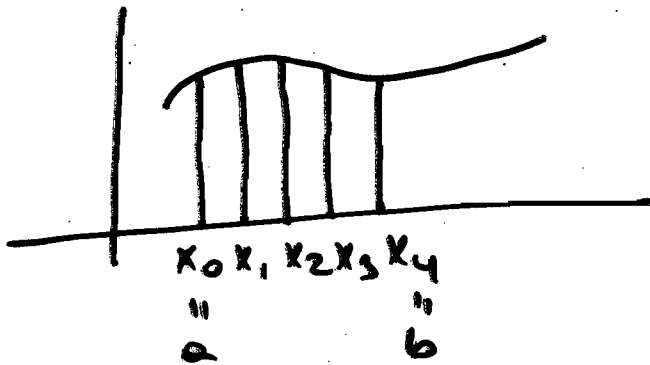
$$\int_{x_0}^{x_2} L_1(x) dx = \frac{4h}{3} ; \int_{x_0}^{x_2} L_2(x) dx = \frac{h}{3}$$

entonces:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

Método de Simpson Compuesto

Necesitamos un n -par de intervalos



$$h = \frac{b-a}{2n}$$

Dividimos el intervalo $[a, b]$ en un n -par de intervalos

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x) dx + \dots + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x) dx$$

$$= \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

entonces:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x) dx + \dots +$$

$$+ \dots + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x) dx =$$

$$= \frac{h}{3} \sum_{j=1}^{n/2} \left[f(x_{2(j-1)}) + 4f(x_{2j-1}) + f(x_{2j}) \right]$$

error

$$e \leq \frac{h^4}{180} (b-a) M \text{ orden de } h^4, O(h^4)$$

donde $M = \max_{a \leq x \leq b} |f'''(x)|$

Para ciertos trabajos sobre recursos hidráulicos se requieren canales con un cierto área transversal. A falta de otros medios para el cálculo de tales áreas, se toman medidas de la profundidad a lo largo de la sección transversal. La tabla que sigue muestra la longitud transversal y su correspondiente profundidad.

Utilizando las reglas del trapecio y de Simpson, calcular dicho área transversal, sabiendo que las medidas están expresadas en metros.

long.	0	2	4	6	8	10
prof.	0.0	1.8	2.0	4.0	4.0	6.0
long.	12	14	16	18	20	
prof.	4.0	3.4	3.6	2.8	0.0	

Trapezios:

$$n = 10 \Rightarrow h = \frac{(20 - 0)}{10} = 2$$

$$\int_0^{20} f(x) dx \approx h \left[\frac{1}{2} E + \sum_{i=1}^n I_i \right] =$$

$$= 2 \left(\underset{\text{" } h}{1.8} + \underset{\text{" } I}{2.0} + 4.0 + 4.0 + 6.0 + 4.0 + 3.4 + 3.6 + 2.8 \right)$$

$$\approx 63.2 \text{ m}^2$$

Simpson:

$$\int_0^{20} f(x) dx \approx \frac{h}{3} [E + 4 \sum_{i=1}^n I_i + 2 I_p] =$$

$$= \frac{2}{3} [4(1.8 + 4 + 6 + 3.4 + 2.8) + 2(2 + 4 + 4 + 3.6)]$$

$$\approx 66.4 \text{ m}^2$$